Basic Mathematics
بنیادی ریاضی
Lecture 1 Notes

Muhammad Usman Ali Nizami
محمد عثمان علی نظامی

April 29, 2025

Abstract

اس نوٹ Note میں ہم ریاضی کی بنیادی باتوں پر بات کریں گے۔ اس میں گنتی، اعداد اور نمبرز کے متعلق چیزوں کو بیان کیا جائے گا۔

Contents

1 Fundamental of Counting (بنیادی گنتی)

1.1 Numbers and Digits (ہندسے اور اعداد)

Basic digits are following.

بنیادی اعداد یہ ہیں۔

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \quad (1)$$

All numbers (which are infinite) can be written using these ten numbers along with position.

تمام ہندسے جو کہ لا محدود ہیں انہیں کو ملانے اور مختلف جگہ (position) پر رکھنے سے بنتے ہیں۔

This is a warning for readers to pay attention to potential pitfalls and mistakes. Warning boxes like this will appear frequently throughout our notes.
یہ ایک انتباہ ہے کہ قاری ممکنہ غلطیوں پر توجہ دیں۔اس طرح کے خبردار کرنے والے ڈبے آگے ہماری تحاریر میں کئی دفعہ آئیں گے۔

Warning

Some student will mistakenly say that there are nine numbers in above equation 1, but there are actually 10 because we are starting from zero. And if you count them feom zero to nine they are ten in total.
کچھ طلباء غلطی سے کہیں گے کہ اوپر دی گئی مساوات ایک 1 میں نو اعداد ہیں، لیکن در حقیقت دس ہیں کیونکہ ہم صفر سے شروع کر رہے ہیں۔اور اگر آپ انہیں صفر سے نو تک گنیں تو وہ کل دس عدد بن جاتے ہیں۔

ان اعداد اور ان کو ملانے سے بننے والی گنتی کو ریاضی میں استعمال کیا جاتا ہے۔اب ہم ان کو ملا کر مختلف اعداد کے بنانے کا طریقہ بتائیں گے۔
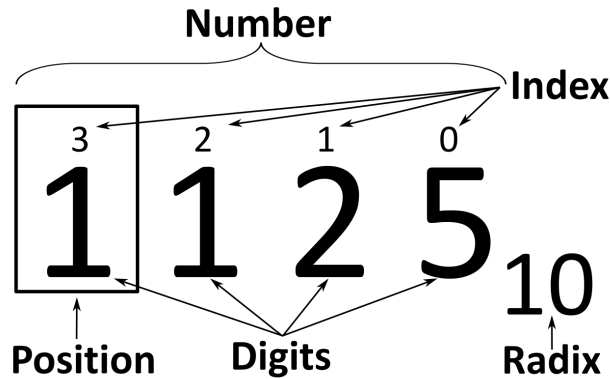
Figure 1: By Michel Bakni CC BY-SA 4.0.

اوپر دی گئی شکل 1 میں اعداد کو مختلف جگہ پر رکھ کر ایک ہندسہ یا نمبر بنانے کا طریقہ بتایا گیا ہے۔اس شکل میں پوزیشن، عدد اور انڈیکس کو واضح کیا گیا ہے۔نیچے دئے گے ٹیبل پر غور کریں۔

Index	Value	Name	نام
0	1	Unit	اکائی
1	10	Ten	دہائی
2	100	Hundred	سینکڑہ
3	1,000	Thousand	ہزار
4	10,000	Ten Thousand	دس ہزار
5	100,000	Hundred Thousand	لاکھ
6	1,000,000	Million	دس لاکھ
7	10,000,000	Ten Million	کروڑ
8	100,000,000	Hundred Million	دس کروڑ
9	1,000,000,000	Billion	ارب
10	10,000,000,000	Ten Billion	دس ارب
11	100,000,000,000	Hundred Billion	سوارب
12	1,000,000,000,000	Trillion	کھرب

Table 1: Extended place value table showing the index, value, name, and Urdu equivalent.

اب ہم اوپر دیئے ہوئے ٹیبل کی مدد سے نمبرز بنانے کا طریقہ واضح کریں گے۔ ہم ایک سے شروع ہو کر کھرب تک جائیں گے۔ اب دس اعداد کی مدد دے باقی نمبرز کیسے بنائے جائیں گے تو اس کے طریقے (Algorithm) کو یاد رکھیں۔ سب سے پہلے آپ نے ایک 1 سے شروع ہونا ہے۔ اور اس کے مطابق آگے بڑھنا ہے جیسا کہ مساوات ایک میں واضح ہے۔
اب آپ نو (9) تک پہنچ جائیں گے۔ اس کے بعد اب ہمارے پاس کوئی نیا عدد موجود نہیں تو ہم پرانے اعداد کو دوبارہ استعمال کریں گے لیکن اب اس میں انکے مقام کی معلومات بھی شامل کردی جائیں گی۔۔ اس مقام کے استعمال کی وجہ سے ہم اس گنتی کو محلی ترقیم یا positional numeral system[1] کہتے ہیں۔ ریاضی آج کل عموما دائیں سے بائیں لکھی جاتی ہے۔۔ لہذا نو کے بعد ہم پہلے مقام یا پوزیشن پر سب سے پہلا عدد یعنی صفر 0 لگا دیں گے۔ لیکن اگر ہم یہاں رک گئے تو پھر صفر اور نو کے بعد آنے والے عدد یعنی دس میں فرق کیسے پتا چلے گا؟ اس کے لیے ہم ایک نیا مقام، جو کہ پہلے عدد صفر کے بائیں جانب ہو گا، وہاں ایک 1 لکھ دیں گے۔ تو یہ اب دس 10 کہلائے گا۔ اس کے بعد، اگلے عدد گیارہ کے لیے سب سے پہلے عدد، جو کہ انتہائی دائیں جانب ہے، اس میں دوبارہ پہلے کی طرح مساوات 1 کے مطابق اگلا عدد لے آئیں گے۔ تو پہلے جو 10 تھا، اب صفر سے اگلا عدد، جو کہ ایک 1 ہے، وہ آجائے گا، جب کہ انتہائی بائیں جانب والا عدد، جو کہ ایک 1 تھا، وہ ویسے کا ویسے رہے گا۔ اب اس کے بعد دوبارہ پرانا سلسلہ شروع ہو جائے گا۔ بائیں جانب والا عدد ویسے کا ویسے رہے گا، لیکن دائیں والے عدد اب صفر سے لے کر نو 9 تک جائیں گے۔ اب آخری عدد انیس 19 ہو گا۔
نیچے دی گئی شکل میں ہم نے گھڑی نما دائرہ بنایا ہے۔ جیسے گھڑی میں ہم بارہ (12) کے بعد ایک پر آجاتے ہیں، ویسے ہی یہاں جب عدد اپنے مقام پر آخری حد نو (9) پر پہنچ جاتا ہے تو اس کے بعد وہ دوبارہ صفر پر پہنچ جاتا ہے۔ اور اس نمبر کے لیے اگلے مقام پر موجود عدد کی قیمت بڑھا دی جاتی ہے۔ جیسے 29 میں پہلا عدد 9 کے بعد صفر ہو جائے گا اور دوسرا عدد 2 سے بڑھ کر 3 ہو جائے گا۔
یہ عمل گنتی کو آگے بڑھانے کا بنیادی اصول ہے، جو ہمیں بڑی سے بڑی مقداریں لکھنے اور سمجھنے کی سہولت فراہم کرتا ہے۔ محلی ترقیم کے اس نظام کی خوبی یہ ہے کہ یہ اعداد کو ان کے مقام اور قدر کے مطابق ترتیب دینے کی صلاحیت فراہم کرتا ہے۔ یہی اصول ہمیں بڑی تعداد کو مختصر اور آسان طریقے سے بیان کرنے میں مدد دیتا ہے، اور یہی وجہ ہے کہ یہ نظام دنیا بھر میں استعمال ہوتا ہے۔ یہ طریقہ محض گنتی تک محدود نہیں بلکہ مختلف ریاضیاتی اعمال میں بھی یہی اصول کارآمد ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر، جب ہم کسی عدد کو جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کرتے ہیں تو یہی محلی ترقیم کا نظام ہماری رہنمائی کرتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اس نظام کو ریاضی اور حساب کی بنیاد سمجھا جاتا ہے، اور اس کے بغیر پیچیدہ حسابات کرنا ممکن نہیں۔

[1] ان کو عربی میں الدلالة الموضعية أو تدوين قيمة المكان کہا جاتا ہے۔
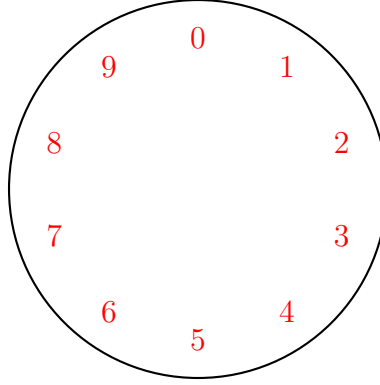
Figure 2: Cyclic representation base-10 digits.

اس کے بعد ہم نو، جو کہ انتہائی دائیں جانب ہے، اسے نو سے صفر کر دیں گے اور دوسرے مقام پر موجود عدد، جو کہ ایک (1) ہے، اسے ایک سے دو (2) کر دیں گے۔ اب یہ بیس (20) بن جائے گا۔ پھر ہم پرانے اصولوں کے مطابق آگے بڑھتے جائیں گے یہاں تک کہ ننانوے (99) تک پہنچ جائیں گے۔ اس کے بعد، ہم دو اعداد کی مدد سے اگلا نمبر، سو، لکھنے سے قاصر ہوں گے۔ پرانے اصول کے مطابق اگر ہم پہلے والے نو (9) کو صفر (0) کر دیں اور دوسرے والے نو کو بھی صفر کر دیں، تو یہ "00" بن جائے گا۔ لیکن یہ کوئی عدد نہیں بلکہ صرف دو مرتبہ صفر لکھا ہوا ہے۔ ایسے میں ہم ایک نیا مقام شامل کریں گے، جیسا کہ ہم نے نو سے دس جاتے وقت کیا تھا۔ اسی طرح، دو کے بعد ہم تیسرا عدد انتہائی بائیں جانب شامل کریں گے، اور وہ عدد سب سے چھوٹا عدد یعنی ایک (1) ہو گا۔ تو اب یہ (100) بن جائے گا، جو کہ سو کی نمائندگی کرتا ہے۔

اس اصول کے تحت ہم چلتے جائیں تو کوئی بھی بڑے سے بڑا عدد لکھ سکتے ہیں۔ کائنات میں جگہ ختم ہو سکتی ہے لیکن اس اصول سے بنائے جانے والا نمبر کی کوئی آخری حد نہیں۔ وہ اس طرح کہ اگر کوئی یہ دعویٰ کرے کہ یہ نمبر آخری ہے، تو آپ اس بات کو آسانی سے غلط ثابت کر سکتے ہیں۔ آپ نے صرف اس کے انتہائی بائیں جانب والے عدد کو ایک بڑھا دینا ہے۔ اگر وہ صفر ہے تو وہ ایک بن جائے گا، ایک (1) دو (2) بن جائے گا، اور اسی طرح آگے چلتے رہیں گے۔ نو (9) صفر بن جائے گا، اور باقی مقامات پر موجود اعداد بھی اپنے کلیے کے لحاظ سے بدل جائیں گے۔ یوں پرانے والے عدد سے آگے والا عدد آ جائے گا اور یہ دعویٰ کہ یہ عدد سب سے بڑا ہے، غلط ثابت ہو جائے گا۔ اب تک کی بات کا خلاصہ نیچے دیے گئے ڈبے میں ہے

Summery so far.

اب تک کا خلاصہ کلام۔

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
10, 11, 12, . \ . \ . \ . \ , 19 \\
20, 21, 22, . \ . \ . \ . \ , 29 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
90, 91, 92, . \ . \ . \ . \ , 99
\end{array}
$$

2 Examples (مثالیں)

اب ہم مختلف مثالوں سے نمبرز کو بنانے کے طریقے کو واضح کریں گے۔ اب نیچے دیئے گئے ٹیبل میں نمبر اور ان سے اگلے نمبر کو واضح طور پر لکھا گیا ہے۔ اس ٹیبل میں، اگلے نمبر سے مراد successor[2] ہے جو کہ پچھلے نمبر سے آگے جانے پر آتا ہے۔

[2] اس کی مزید تفصیل کے لئے ملاحظہ ہو پینو کے مسلمہ (Peano axioms)

نمبر	اگلا نمبر
5	6
9	10
19	20
29	30
49	50
75	76
99	100

Table 2: Numbers and their successors

ان کی مزید تفصیل اگلے اسباق Notes میں آئے گی۔

3 Exercises (مشق)

اب نیچے گے دیئے گئے سوالات کو حل کریں۔

Now solve the exercises below.

1. اگر آپ کے پاس 5 سیب ہیں اور آپ کو 3 مزید ملتے ہیں تو کل کتنے سیب ہوں گے؟

   If you have 5 apples and you get 3 more, how many apples will you have in total?

2. ایک نمبر 79 سے اگلا نمبر کیا ہو گا؟

   What is the next number after 79?

3. اوپر دئے ہو کلیہ سے اگر کوئی یہ نتیجہ نکال لے کہ ایک نمبر اور اس سے اگلے نمبر تک جاتے وقت ہمیشہ صرف ایک مقام (Position) پر موجود عدد بدلتا ہے جیسے 13 سے اگلا عدد 14، اور 57 سے اگلا عدد 58 ہے۔ اب ان میں صرف ایک عدد ہی بدلا ہے، نہ کہ سارے۔ تو کیا ہم کہ سکتے ہے کے ہمیشہ ایسا ہی ہو گا؟ اگر نہیں تو اس دعوہ کے خلاف مثال[3] پیش کریں۔

   From the formula given above, if someone concludes that when moving from one number to the next, only a single digit at one position changes (e.g., from 13 to 14, and from 57 to 58, only one digit has changed, not all), can we say that this will always be the case? If not, provide a counterexample.

4 Conclusion (اختتامیہ)

This document has presented a variety of mathematical concepts. Mathematics serves as a universal language that transcends cultural and linguistic boundaries, allowing precise communication of complex ideas. The beauty of mathematical expressions lies not just in their aesthetic form but also in their ability to describe and predict the physical world with remarkable accuracy.

By providing explanations in English, Arabic, and Urdu, this document also highlights the global nature of mathematical discourse and the importance of making mathematical knowledge accessible across different cultures and languages.

[3] ایسی مثال جس سے ریاضی کہ متعلق کوئی دعوہ غلط ثابت ہو جائے اس کو مثال معاکس (Counterexample) کہتے ہیں۔